www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben
für die Klassen 9 und 10 - Sekundarstufe I
August bis Oktober 2021

Aufgabe 1

Waage

Nimm aus dem ersten Beutel eine Münze, aus dem zweiten Beutel zwei Münzen, aus dem dritten Beutel drei Münzen, und so weiter.

Insgesamt hast du aus dem Beutel 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55 Münzen entnommen. Wenn alle Münzen echt sich, wiegen sie zusammen 550g.

Da aber in einem Beutel gefälschte Münzen sind, die jeweils 1g leichter sind, wird die Waage ein Gewicht zwischen 540g und 549g anzeigen.

549g, wenn nur eine gefälschte Münze darunter ist. 548g, wenn zwei gefälschte Münzen darunter sind, und so weiter. Mit dem Wissen, wie viele gefälschte Münzen sich unter den 55 Münzen befinden, kann man leicht den richtigen Beutel identifizieren.

Wiegen die 55 Münzen beispielsweise 546g, so sing vier gefälschte Münzen darunter und daher muss der vierte Beutel die gefälschten Münzen enthalten.

Aufgabe 2

Dreiecke

Durch die Winkelsumme im Dreieck und Winkelsätze lässt sich leicht einsehen, dass die Winkel des roten und blauen Trapezes paarweise übereinstimmen. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass die Verhältnisse einander zugehöriger Strecken gleich sind.

Da das gesamte Dreieck eine Seitenlänge von 1 und das große Dreieck eine Seitenlänge von x hat, können alle anderen Streckenlängen problemlos berechnet werden. Für Ähnlichkeit muss das Verhältnis der Grundseiten gleich dem Verhältnis der Schenkel der Trapeze sein. Es folgt also:

$$\frac{1-(2-2x)}{1-x} = \frac{1-x}{x}$$
$$\Leftrightarrow x \cdot (1-(2-2x)) = (1-x)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - x = 1 - 2x + x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618 \vee x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618$$

Es kommt in diesem Fall nur der positive Wert, also x = 0,618 infrage.

muss im Sprudelwasserglas 200-x ml Orangensaft und x ml Sprudel enthalten sein.

Aufgabe 3

Sechser-Domino-Spiel

Die Dominosteine mit zweimal derselben Zahl darauf können für die Überlegungen außer Acht gelassen werden, da sie an beliebigen Stellen zwischen zwei anderen Steinen eingefügt werden können.

Insgesamt gibt es 7 Dominosteine mit derselben Zahl darauf und 21 Steine mit zwei verschiedenen Zahlen darauf. Dies liegt daran, dass der Stein 1-2 dieselbe Zahlenkombination besitzt, wie der

Stein 2-1 und somit werden beide Kombinationen nur durch einen Stein dargestellt.

Um einen vollständigen Kreis legen zu können, muss am Ende jeder Stein angelegt werden können. Dies ist nur dann möglich, wenn jede Zahl auf allen Steinen eine gerade Anzahl oft vorkommt. Hätte man beispielsweise drei Steine mit der Zahl 1 darauf, so könnten zwei aneinander gelegt werden, aber an dem dritten Stein kann kein weiterer Stein mehr angelegt werden. Die Steinkette wären dann zu Ende.

Da insgesamt sieben Zahlen, nämlich 0 bis 6 vorkommen, befindet jede Zahl auf sechs Steinen. Jede Zahl ist also eine gerade Anzahl oft enthalten und somit ist es möglich einen vollständigen Kreis aus Sechser-Dominosteinen zu legen.

Ein Möglichkeit ist:

0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 0 - 2 - 4 - 6 - 1 - 3 - 5 - 0 - 3 - 6 - 2 - 5 - 1 - 4 - 0