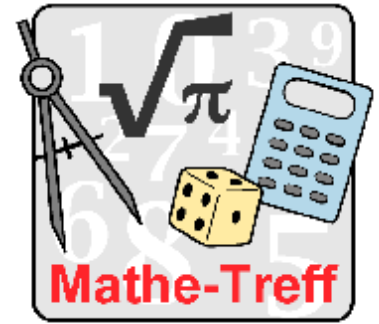


[www.mathe-treff.de](http://www.mathe-treff.de)

**Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben**

**für die Oberstufe**

**Januar bis März 2022**



© Bezirksregierung Düsseldorf

## Aufgabe 1

### Würfel aus Dominos

- a) Für die Anzahl der Dominosteine gilt:  $n^3$ , die Anzahl der weißen Dominosteine ist demzufolge  $(n - 2)^3$ . Die Anzahl der braunen beträgt dann  $n^3 - (n - 2)^3$
- b) Laut Aufgabenstellung soll die Anzahl der braunen Steine 26 bzw. 152 sein. Es sind also die Gleichungen  $n^3 - (n - 2)^3 = 26$  bzw.  $n^3 - (n - 2)^3 = 152$  zu lösen. Nutzt man davor einen GTR so erhält man für  $n^3 - (n - 2)^3 = 26$  also Lösung  $n = 3$ , ( $n = -1$  entfällt). Es sind also  $(3-2)^3 = 1$  weißer Dominostein enthalten.
- c)  $n^3 - (n - 2)^3 = 152$ , hat die Lösungen  $n = 6$ , ( $n = -4$  entfällt). Hier sind also  $(6-2)^3 = 64$  weiße Dominosteine enthalten.  
 $n^3 - (n - 2)^3 = 60002$ , hat die Lösungen  $n = 101$  ( $n = -99$ ) entfällt. Hier sind also  $(101-2)^3 = 99^3$  weiße Dominosteine enthalten.  
(Hinweis:  $n^3 - (n - 2)^3 = n^3 - (n^3 - 6n^2 + 12n - 8) = 6n^2 - 12n + 8$ .)

## Aufgabe 2

### Der Schnee in Jonsdorf

- a) Die Schneemenge hat die Form eines Quaders, sein Volumen berechnet sich wie folgt:

$$V = \text{Länge} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe};$$

$$V = 50 \text{ m} \cdot 40 \text{ m} \cdot 50 \text{ cm} = 50 \text{ m} \cdot 40 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m} = 1000 \text{ m}^3.$$

- b) Hier gelten die folgenden Formeln für das Volumen bzw. Oberfläche eines Kreiskegels:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, O = \pi r^2 + \pi r s, \text{ mit } s = \sqrt{h^2 + r^2}, s \text{ ist die Mantellinie.}$$

O soll minimal werden, also  $O(r, h) = \pi r^2 + \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$ , mit  $h = \frac{3V}{\pi r^2}$ , folgt:

$$O(r) = \pi r^2 + \pi r \sqrt{\frac{9V^2}{\pi^2 r^4} + r^2}$$

Da das Volumen  $50\text{m} \cdot 40\text{m} \cdot 0,5\text{m} = 1000 \text{ m}^3$ , beträgt gilt:

$$O(r) = \pi r^2 + \pi r \sqrt{\frac{9000000}{\pi^2 r^4} + r^2}$$

$O(r)$  wird nach GTR an der Stelle  $r \approx 6,963 \text{ m}$  also bei etwa  $6,96 \text{ m}$  minimal. Für die Höhe des Kegels mit der kleinsten Oberfläche gilt dann  $h \approx 19,70 \text{ m}$ .

Hier lässt man sich den Graphen anzeigen, und an der Stelle, wo  $O(r)$  am kleinsten ist, liest man den Radius ab.

## Aufgabe 3

### Die Fahrt nach Jonsdorf

- a) Wenn man davon ausgeht, dass alle fünf Sitzplätze gerecht unter den drei Kindern aufgeteilt werden, dann gibt es  $5 \text{ mal } 4 \text{ mal } 3 = 60$  Pausen. Wenn es nur darum geht – wer

hinter dem Fahrersitz auf diesem Sitzplatz sitzen darf – dann gibt es nur 3 Pausen, die durch den notwendigen Sitzplatzwechsel benötigt würden.

Hier ist die Aufgabenstellung bewusst etwas offener formuliert worden.

b) Es gelten die üblichen Gesetze: Weg = Geschwindigkeit mal Zeit.

Für die erste Hälfte der Strecke gilt:  $s_1 = 60 \cdot t_1$ , für die zweite Hälfte der Strecke gilt:

$s_2 = 80 \cdot t_2$ . Da laut Aufgabenstellung die gesamte Strecke gleich  $s_1 + s_2$  ist und  $s_1 = s_2$  gilt, gilt auch  $60 \cdot t_1 = 80 \cdot t_2$ , also  $t_2 = 0,75 \cdot t_1$ .

Für die Durchschnittsgeschwindigkeit gilt: Gesamter Weg durch die dazu benötigte Zeit, also in Formel:

$$v_{\text{Durchschnitt}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{60t_1 + 80t_2}{t_1 + t_2} = \frac{60t_1 + 0,75 \cdot 80t_1}{t_1 + 0,75t_1} = \frac{120t_1}{1,75t_1} \approx 68,57 \text{ [km/h]}.$$

Johann hat nicht recht, weil die durchschnittliche Geschwindigkeit etwa in diesem Fall 68,6 km/ h beträgt.