www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10 (Sekundarstufe I)

Oktober bis Dezember 2023

© Mathematik-Treff

Aufgabe 1

Weihnachtspralinen

Zu zeigen: $V = \frac{1}{3} r \cdot O$.
Man teile den Würfel in 6 gleich große Pyramiden mit den Seiten des Würfels als Grundfläche und dem Mittelpunkt der Kugel als Spitze.
Damit gilt, wenn V_P das Volumen einer der Pyramiden sei: $V = 6V_P$ (1).
Für die Pyramiden gilt des Weiteren die Formel $V_P = \frac{1}{3} G \cdot h$ (2), wobei G hier eine Seitenfläche des Würfels sei.
Man setze (2) in (1) ein: $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot G \cdot h$ (3).
Für die Oberfläche des Würfels gilt nach Definition $O = 6 \cdot G$ (4).
(4) in (3) eingesetzt ergibt: $V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot h$ (5).
$h = r$ (6) gilt, da die Höhen der Pyramiden ein Radius der Kugel im Würfel sind.
(6) eingesetzt in (5) ergibt nun $V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot r$.

Aufgabe 2

Geometrie in der Vorweihnachtszeit

Es werden die Formeln für die Zylindermanteloberfläche $O_M = 2\pi \cdot r \cdot h$ und für das Volumen von Zylindern $V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$ genutzt.
Nach Aufgabenstellung ist h konstant.
Sei O_{M1} die Manteloberfläche der kleinen Kerze und O_{M2} die Manteloberfläche der größeren Kerze, dann gilt: $4 \cdot O_{M1} = O_{M2}$. Weiterhin sei r_1 und r_2 der Radius dieser Kerzen, dann ergibt sich daraus:
$4 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot h) = 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot h \Rightarrow 4 \cdot r_1 = r_2$.
Eingesetzt in die Volumenformel ergibt sich $V_2 = \pi \cdot (4 \cdot r_1)^2 \cdot h = \pi \cdot 16 \cdot r_1^2 \cdot h$.
Somit hat sich das Volumen versechzehnfacht und das Verhältnis beträgt 1:16.

Aufgabe 3

Ein sehr großer Weihnachtsbaum

Seien x, y bzw. z die Anzahl von Kugeln in kleinen, mittleren bzw. großen Schachteln und a, b bzw. c die Anzahl ebenjener. Aus den 6 Bedingungen ergibt sich jeweils eine Gleichung:

(1) $x - 2 = a$
(2) $5x = z$
(3) $y - 2 = b$
(4) $a + b + c = 22$
(5) $x + 6 = y$
(6) $x + 36 = z$

$(6)\text{in } (2) \Rightarrow\ 5x = x + 36 \Leftrightarrow 4x = 36 \Leftrightarrow x = 9\ (7)$

$(7)\text{in } (1) \Rightarrow a = 9 - 2 = 7\ (8)$

$(7)\text{in } (5) \Rightarrow y = 9 + 6 = 15\ (9)$

(7)in $(6) \Rightarrow z = 9 + 36 = 45$ (10)

(9)in $(3) \Rightarrow b = 15 - 2 = 13$ (11)

(8) und (11) in $(4) \Rightarrow 7 + 13 + c = 22 \Leftrightarrow c = 2$

Es gibt 7 kleine, 13 mittlere und 2 große Schachteln mit insgesamt $7 \cdot 9 + 13 \cdot 15 + 2 \cdot 45 = 348$ Kugeln.