Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe

Oktober bis Dezember 2023

Aufgabe 1

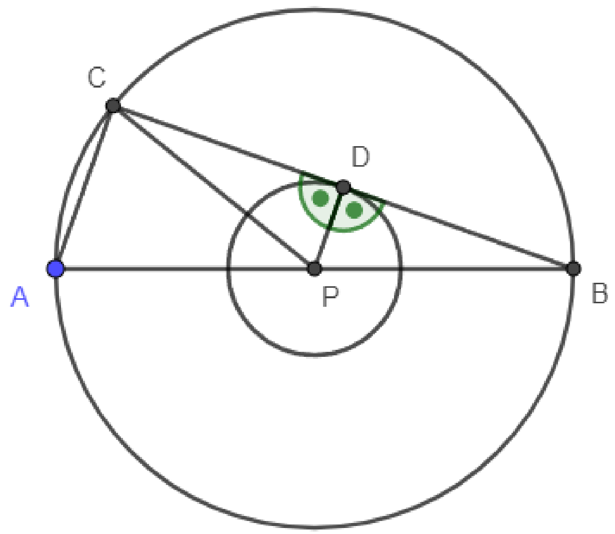
Weihnachtspralinen

Zu zeigen: $V = \frac{1}{3} r \cdot O$.
Man teile das Tetraeder in 4 gleich große Pyramiden mit den Seitenflächen des Tetraeders als Grundfläche und dem Mittelpunkt der Kugel als Spitze.
Damit gilt, wenn V_P das Volumen einer der Pyramiden sei: $V = 4V_P\ (1)$.
Für die Pyramiden gilt des Weiteren die Formel $V_P = \frac{1}{3} G \cdot h\ (2)$, wobei G hier die Fläche eines der Dreiecke sei aus denen das Tetraeder besteht.
Man setze (2) in (1) ein: $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot G \cdot h\ (3)$.
Für die Oberfläche des Tetraeders gilt nach Definition $O = 4 \cdot G\ (4)$.
(4) in (3) eingesetzt ergibt: $V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot h\ (5)$.
$h = r\ (6)$ gilt, da die Höhen der Pyramiden ein Radius der Kugel im Tetraeder sind.
(6) eingesetzt in (5) ergibt nun $V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot r$.

Aufgabe 2

Alpakas

Seien die Eckpunkte des Dreiecks auf dessen Seiten Umi läuft A, B und C und der Pflock im Punkt P.
Weiterhin sei die Länge der Leine des Alpakas Joe r, dann ist die Länge der Leine von Umis Leine $3r = |AP| = |BP| = |CP|$.
Des Weiteren gilt nach Aufgabenstellung $|AC| = 15$.
Da $\overline{BC}$ nach Aufgabenstellung eine Tangente des Kreises mit Radius r um P ist gilt: $\measuredangle PDB = 90°$ und $|PD| = r$.
Nach dem Satz des Thales gilt: $\measuredangle ACB = 90°$, da ΔABC auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$ liegt.
Nach dem zweiten Strahlensatz gilt: $\frac{|PD|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|BA|}$
$\Rightarrow \frac{r}{15} = \frac{3r}{6r} \Leftrightarrow \frac{r}{15} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = \frac{15}{2}$.
Die Leinen der Alpakas sind somit 7,5m bzw. 22,5m.



© Gerhild Kleinhans, Mathematik-Treff

Aufgabe 3

Mathematisches Rätsel in der Vorweihnachtszeit

Nach Aufgabenstellung gilt: $\frac{1}{x} + x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1+x^2}{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x|1$.

Zu zeigen ist für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\frac{1}{x^n} + x^n \in \mathbb{Z}$.

Wir zeigen durch vollständige Induktion mit Fallunterscheidung.

Fall 1: Sei $n > 0$

Induktionsanfang: $n = 0 : \frac{1}{x^0} + x^0 = 2, 2 \in \mathbb{Z}$;

$n = 1$: $\frac{1}{x^1} + x^1 = \frac{1}{x} + x, \frac{1}{x} + x \in \mathbb{Z}$; also gilt der Induktionsanfang;

Induktionsannahme: $\frac{1}{x^n} + x^n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n+1} \in \mathbb{Z}$

Induktionsschritt: $\frac{1}{x^{n+1}} + x^{n+1} = \frac{1}{x^n \cdot x} + x^n \cdot x = \left(\frac{1}{x^n} + x^n\right) \cdot \left(\frac{1}{x} + x\right) - \left(\frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1}\right)$

Dann gilt: $\left(\frac{1}{x^n} + x^n\right) \in \mathbb{Z}, \left(\frac{1}{x} + x\right) \in \mathbb{Z}, \left(\frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1}\right) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x^n} + x^n\right) \cdot \left(\frac{1}{x} + x\right) - \left(\frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1}\right) \in \mathbb{Z}$

Fall 2: Sei $n < 0$

Für negative n gilt $\frac{1}{x^n} + x^n = x^{-n} + \frac{1}{x^{-n}}$. Die Induktion gilt demnach auch für negative n.