www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben

für die Oberstufe

Januar bis März 2024

Aufgabe 1

Die Hausaufgaben

Zuerst ermitteln wir, welche Möglichkeiten es gibt, in welcher Klasse die zwei Personen ohne Hausaufgabe sind. Dafür gibt es sechs Möglichkeiten: Alle sind in der 10a, alle sind in der 10b, alle sind in der 10c, eine in der 10a und eine in der 10b, eine in der 10a und eine in der 10c, eine in der 10b und eine in der 10c.

Anschließend müssen wir für jede der sechs Möglichkeiten die Wahrscheinlichkeit ausrechnen:

(1) Alle in der 10a

In der 10a gibt es insgesamt 25 Personen, von denen 4 keine Aufgabe haben. Also müssen 21 die Aufgaben haben. Einerseits gibt es 25 mal 24 mal 23 Möglichkeiten, wie man drei Personen aus den 25 auswählen kann. Das sind insgesamt 13 800. Bei wie vielen davon hätte man zwei Personen ohne Aufgabe? Dafür müsste man zuerst eine aus den 4 ohne Hausaufgabe auswählen, dann eine aus den drei verbliebenen ohne Hausaufgabe und dann eine Person aus den 21 mit Hausaufgabe. Allerdings könnte man die Personen ohne Hausaufgabe auch an der zweiten und dritten Stelle haben oder an der ersten und dritten Stelle. Also gibt es insgesamt 3 mal 4 mal 3 mal 21 Möglichkeiten dafür bzw. 756. Anschließend haben alle in der 10b und der 10c die Aufgaben. In der 10b haben 16 von 24 die Hausaufgaben. Für die erste Person gibt es daher 16 Möglichkeiten (von 24), für die zweite 15 (von 23) und für die dritte 14 (von 22). In der 10c haben 27 von 30 Personen die Hausaufgabe. Für die erste Person ergeben sich 27 (von 30) Möglichkeiten, für die zweite 26 (von 29) und für die dritte 25 (von 28).

Damit haben wir insgesamt die Wahrscheinlichkeit 756/13800 mal 16/24 mal 15/23 mal 14/22 mal 27/30 mal 26/29 mal 25/28 gleich etwa 0,011.

(2) Alle in der 10b

In der 10a hatten alle drei ausgewählte Schülerinnen und Schüler die Hausaufgaben. Wir erhalten für die erste Person 21 (von 25) Möglichkeiten, für die zweite 20 (von 24) und für die dritte 19 (von 23). In der 10b haben zwei Personen keine Hausaufgabe. Das macht für die beiden 8 von 24 und dann 7 von 23 und für die letzte Person 16 von 22. Da sich die zwei Personen auf drei Plätze verteilen, muss das Ganze mal drei multipliziert werden. Damit erhalten wir 2688/12144.

In der 10c erhalten wir wieder dieselben Werte wie bei (1), also 27 (von 30) Möglichkeiten, dann z 26 (von 29) und dann 25 (von 28).

Damit ergibt sich insgesamt die Wahrscheinlichkeit 21/25 mal 20/24 mal 19/23 mal 2688/12144 mal 27/30 mal 26/29 mal 25/28 gleich etwa 0,092.

(3) Alle in der 10c

In der 10a haben alle die Hausaufgaben. Wir erhalten dieselben Werte wie in (2): 21 von 25, dann 20 von 24 und dann 19 von 23. In der 10b haben auch alle die Hausaufgaben. Wir erhalten dieselben Werte wie in (1): 16 von 24, dann 15 von 23 und dann 14 von 22. In der 10c haben zwei Personen keine Hausaufgaben. Das macht für die beiden 3 von 30, dann 2 von 29 und für die dritte Person 27 von 28. Die zwei verteilen sich wieder auf drei Plätze, also multiplizieren wir mit drei. Das macht 486/24360.

Damit ergibt sich insgesamt die Wahrscheinlichkeit 21/25 mal 20/24 mal 19/23 mal 16/24 mal 15/23 mal 14/22 mal 486/24360 gleich etwa 0,003.

(4) Eine in der 10a und eine in der 10b

In der 10a hat eine Person keine Aufgaben: 4 von 25, die anderen haben sie: 21 von 24 und 20 von 23. Das wird mit drei multipliziert, da die Person ohne Hausaufgabe auf einer von drei Stellen auftauchen kann. In der 10b hat eine Person keine Aufgaben: 8 von 24, für die anderen 16 von 23 und 15 von 22. Das wird mit drei multipliziert, da die eine Person auf einer von drei Stellen auftauchen kann. In der 10c haben alle die Hausaufgaben: 27 von 30, dann 26 von 29 und dann 25 von 28.

Wir erhalten als Rechnung: 3 mal 4/25 mal 21/24 mal 20/23 mal 3 mal 8/24 mal 16/23 mal 15/22 mal 27/30 mal 26/29 mal 25/28 gleich etwa 0,125.

(5) Eine in der 10a und eine in der 10c

In der 10a hat eine Person keine Aufgaben: 4 von 25, die anderen haben sie: 21 von 24 und 20 von 23. Das wird mit drei multipliziert, da die Person ohne Hausaufgabe auf einer von drei Stellen auftauchen kann. In der 10b haben alle die Aufgaben, also 16 von 24, 15 von 23 und 14 von 22. In der 10c hat eine Person keine Aufgaben: 3 von 30, die anderen haben sie: 27 von 29 und 26 von 28. Das wird dann mit drei multipliziert, weil die eine Person auf einer von drei Stellen auftauchen kann.

Wir erhalten die Wahrscheinlichkeit 3 mal 4/25 mal 21/24 mal 20/23 mal 16/24 mal 15/23 mal 14/22 mal 3 mal 3/30 mal 27/29 mal 26/28 gleich etwa 0,026.

(6) Eine in der 10b und eine in der 10c

In der 10a haben alle die Aufgaben: 21 von 25, 20 von 24, 19 von 23. In der 10b hat eine Person keine Aufgaben: 8 von 24, für die anderen 16 von 23 und 15 von 22. Das wird mit drei multipliziert, da die eine Person auf einer von drei Stellen auftauchen kann. In der 10c hat eine Person keine Aufgaben: 3 von 30, die anderen haben sie: 27 von 29 und 26 von 28. Das wird dann mit drei multipliziert, weil die eine Person auf einer von drei Stellen auftauchen kann.

Damit ergibt sich: 21/25 mal 20/24 mal 19/23 mal 3 mal 8/24 mal 16/23 mal 15/22 mal 3 mal 3/30 mal 27/29 mal 26/28 gleich etwa 0,071.

Zum Schluss addieren wir die sechs Einzelwahrscheinlichkeiten und erhalten als Ergebnis: 0,328.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 32,8 Prozent.

Aufgabe 2

Die Korrektur

Der Lehrer muss insgesamt 28 Arbeiten korrigieren. Er braucht pro Arbeit 70 Minuten, das macht insgesamt 1960 Minuten. Wir dividieren durch 60, um die Anzahl der Stunden zu erhalten. Das Ergebnis ist 32 Stunden und 40 Minuten. Um die doppelt so schnelle Korrektur am Mittwoch zu berücksichtigen, zählen wir acht Stunden (die doppelte Zeit) am Mittwoch.

Am Montag fängt er an mit 4 Stunden, am Dienstag erreicht er 8, am Mittwoch 16, am Donnerstag 20, am Freitag 24 und am Samstag 30. Am Montag der nächsten Woche wird de Rest erledigt.

Er wird also am nächsten Montag fertig.

Aufgabe 3

Kugel und Zylinder

a) Die Formel für das Volumen lautet 4/3 mal pi mal r^3 und die für die Oberfläche lautet 4 mal pi mal r^2. Das r steht jeweils für den Radius. Da derselbe Wert herauskommt, muss gelten: 4/3 mal pi mal r^3 = 4 mal pi mal r^2. Wir dividieren durch Pi und erhalten als neue Gleichung: 4/3 mal r^3 = 4 mal r^2. Dann dividieren wir durch r^2 (der Radius kann nicht Null sein, sonst hätten wir keine Kugel) und erhalten 4/3 mal r = 4. Wir multiplizieren mit ¾ und erhalten als Endergebnis: r = 3 cm.

b) Die Formel für das Volumen lautet pi mal r^2 mal h. Da die Höhe aber dem Radius entspricht erhalten wir pi mal r^3. Die Formel für die Oberfläche lautet 2 mal pi mal r^2 + 2 mal pi mal r mal h. Da auch hier die Höhe dem Radius entspricht, erhalten wir 4 mal pi mal r^2.
Da derselbe Wert herauskommt, muss gelten:
pi mal r^3 = 4 mal pi mal r^2. Wir dividieren durch Pi und erhalten r^3 = 4 mal r^2. Wir dividieren dann durch r^2 (r kann nicht Null sein, sonst hätten wir keinen Zylinder). Damit ergibt sich aber als Endergebnis: r = 4 cm.