



## Aufgabe 1

### Die Ziegen zweier Schwestern

Wenn es  $n$  Ziegen gibt und jede Ziege  $n$  Euro kostet, ist der Gesamtbetrag  $n^2$  Euro.

Jede Zahl  $n$  kann man in der Form  $a \cdot 10 + b$  schreiben; beispielsweise die Zahl 4356 als  $435 \cdot 10 + 6$ .

$n^2$  ist also  $(a \cdot 10 + b) \cdot (a \cdot 10 + b) = 100 \cdot a^2 + 20 \cdot ab + b^2$ .

Die ersten beiden Terme ( $100 \cdot a^2 + 20 \cdot ab$ ) ergeben immer eine Zahl mit einer geraden Zehnerstelle. Dieser Anteil lässt sich immer zwischen den beiden Erben glatt aufteilen. Nur der Anteil der Einerstelle  $b \cdot b$  kann also dazu führen, dass die beiden Schwestern nicht gleich viele 10-Euro-Scheine erhalten.

$b^2$  sind die ersten 10 Quadratzahlen: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, und 81. Davon haben nur 16 und 36 eine ungerade Zehnerstelle; bei allen anderen Zahlen hätte beide Schwestern gleich viele 10-Taler-Scheine bekommen.

Egal, ob nun 16 oder 36 - die Einerstelle ist immer 6; die jüngere Schwester hat also 6 Euro in Münzen erhalten; die ältere Schwester muss der jüngeren Schwester daher noch 2 Euro geben.

## Aufgabe 2

### Eine Reihe von Quadratzahlen

Man muss 15 mal eine Quadratzahl zwischen 4 und 25 bilden. Zuerst einmal nimmt man an, dass man jede der Zahlen 1 bis 16 zweimal zur Verfügung hat:

4: 1x (1;x) (2;2) (3;x) (4;4) (5;5) (6;6) (7;7) (8;8) (9;9) (10;10) (11;11) (12;12) (13;13) (14;14) (15;15) (16;16)

9: 4x (x;x) (2;x) (x;x) (4;x) (5;x) (6;x) (7;x) (8;x) (9;9) (10;10) (11;11) (12;12) (13;13) (14;14) (15;15) (16;16)

16: 5x (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (8;x) (9;x) (10;x) (11;x) (12;x) (13;13) (14;x) (15;15) (16;16)

25: 4x (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (8;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;13) (x;x) (15;x) (16;x)

So kann man aber nur  $1+4+5+4=14$  Quadratzahlen bilden! Beginnt man aber mit der 25, kann man  $4 \times 9$ ,  $7 \times 16$  und  $4 \times 25$  bilden, wobei die 4 (als Summe) nicht verwendet wird. Die 16 und die 8 bleiben je einmal übrig, müssen also am Anfang bzw. am Ende stehen. Damit sind auch die zweite und die vorletzte Zahl festgelegt ( $25=16+9$  und  $9=8+1$ ; also 9 und 1).

Der Rest ist nicht mehr schwer: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8

### Aufgabe 3

#### Das Frühlingsfest

Sei

$x$  = Anzahl der Personen

$y$  = Anzahl der Kutschen zu Beginn

Auf halbem Wege fallen zehn Kutschen aus, sodass jeder der übrigen eine weitere Person aufnehmen muss.

$$x/(y-10) = x/y + 1 \Rightarrow x = y(y-10)/10$$

Vor Antritt des Rückweges fallen weitere 15 Kutschen aus, was zur Folge hat, dass in jeder Kutsche drei Personen mehr sind als bei der Abfahrt am Morgen.

$$x/[y-(15+10)] = x/y + 3 \Rightarrow x = 3y(y-25)/25$$

Gleichsetzen:

$$y(y-10)/10 = 3y(y-25)/25 \Rightarrow y = 100$$

Einsetzen:

$$\Rightarrow x = y(y-10)/10 = 100(100-10)/10 = 900$$

An dem Fest nahmen also 900 Personen teil.

.