www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe

Januar bis März 2025

Aufgabe 1

Zahl transformiere dich!

Zunächst formulieren wir das Zahlenpaar (x; y) um in (x; x+n); n ist also die Differenz zwischen y und x und ist positiv.

Wenn wir T_1: (x,y) → (x+1, 2*(x+n)) n mal anwenden erhalten wir (x+n ; 2n*x + 2n*n) Wenn wir T_2: (x,y) → (2*x, x+n+1) (n-b) mal anwenden, erhalten wir:

(2(n-b)*x + 2(n-b)*n ; 2n*x + 2n*n + n - b)

b ist eine Zahl unserer Wahl kleiner als n, (n-b) ist also positiv.

Nun wenden wir einmal T_1 an:

(2(n-b)*x + 2(n-b)*n + 1 ; 2(n+1)*x + 2(n+1)*n + 2n - 2b)

Schließlich wenden wir (b-1) mal T_2 an:

(2(n+1)*x + 2(n+1)*n + 2(b+1) ; 2(n+1)*x + 2(n+1)*n + 2n - b + 1)

Die Differenz dieser beiden Zahlen ist der Absolutwert von | 2(b+1) + b - (2n + 1) |.

Wir erinnern uns, dass die Differenz der beiden ursprünglichen Zahlen n ist. Die Frage ist nun, ob es eine Zahl b gibt, sodass die neue Differenz kleiner als n ist, egal, wie groß die Zahl n ist:

| 2(b+1) + b - (2n + 1) | < n

Dies ist immer der Fall, mit Ausnahme von n=1. Wenn wir den oben beschriebenen Algorithmus mehrfach anwenden, wird die Differenz der beiden Zahlen immer kleiner, bis sie schließlich 1 oder 2 ist.

Fall 1: Die Differenz ist 2. Dann führt eine weiterer Durchlauf mit b=1 zu zwei gleichen Zahlen. Fall 2: Die Differenz ist 1. Dann führen folgende Schritte zu einem Zahlenpaar mit der Differenz 2: (x ; x+1) ... ein Zahlenpaar mit der Differenz 1 (x+1 ; 2x+2) (x+2 ; 4x+4) (2x+4 ; 4x+5) (4x+8 ; 4x+6) ... ein Zahlenpaar mit der Differenz 2 .

Aufgabe 2

Zwölf Studenten und eine Zahl

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, ..., 13 ist 360.360.

Zwei aufeinanderfolgende Studenten sollen falsch liegen, sonst keiner.

Die mit 'x' markierten Studenten können nicht falsch liegen, weil das jeweils eine andere falsche Aussage eines nicht benachbarten Studenten nach sich ziehen würde.

x 2 (4)

x 3 (6)

x 4 (8)

x 5 (10)

x 6 (12)

7

8

9

x 10 (2 oder 5)

11

x 12 (3 oder 4)

13

Es bleiben somit nur (7,8) und (8,9) übrig. Wir probieren beide Möglichkeiten aus:

$360.360/7/2 = 25.740 < 50.000$

$360.360/3/2 = 60.060 > 50.000$

Die gesuchte Zahl ist also 25.740.

Aufgabe 3

Puzzleteile

Seien a und b die Längen der Puzzleseiten ohne Ecken (also x-2 und y-2 bei einem x*y-Puzzle), dann muss gelten:

$a * b = 2a + 2b + 4$

$a = (2b+4) / (b-2)$

Wobei a und b ganzzahlig sein müssen. Erfüllt werden diese Bedingungen nur von Puzzles mit 12x5 Teilen oder 8x6 Teilen.

Für n, m>=2 gilt:

Anzahl der Innenteile = (n-2)(m-2)

Anzahl der Randteile = 2n+2m-4

Gleichsetzen und umformulieren liefert

$(n-4)(m-4) = 8$

Die möglichen Faktorisierungen von 8 sind:

8 = 1x8 n=5, m=12

8 = 2x4 n=6, m=8

8 = 4x2 n=8, m=6

8 = 8x1 n=12, m=5

Es gibt also nur zwei Puzzles mit gleich vielen Innen- wie Außenteilen: 12x5 und 8x6.