www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe

Juli bis September 2025

Aufgabe 1

Funktion gesucht!

1) Sei f eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte reelle Funktion mit folgenden Eigenschaften:
   a) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
   b) $f(1) = 25.$

Mit b) $f(1) = 25$ gilt wegen a) auch $25 = f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$ =[$f\left(\frac{1}{2}\right)$]^2, also ist $f\left(\frac{1}{2}\right) = |\sqrt{25}| = 5$ oder -5. Der Funktionswert kann also 5 oder -5 sein.

Aufgabe 2

Wurzeln

Seien a und b zwei beliebige nichtnegative reelle Zahlen dann lautet die Formel in heutiger Schreibweise: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$.

Beweis: Anwenden der Binomischen Formeln: $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}.$

Zieht man aus diesem Ausdruck die Wurzel erhält man:

$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}.$

Aufgabe 3

Freibad

a) Sei t die Zeit für das vollständige Befüllen des Beckens mit allen drei Pumpen, dann gilt:

$$\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right) \cdot t = 1$$

Dann erhält man für $t = \frac{360}{59} h \approx 6\text{h und } 6\text{min.}$

b) Jetzt startet die erste Pumpe 3 Stunden später, also gilt folgende Gleichung:

$$\frac{1}{15}(t-3) + \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right) \cdot t = 1$$

Als Lösung der Gleichung erhält man: $t = \frac{432}{59} h \approx 7\text{h und } 19 \text{ min.}$

c) Man rechnet erst mal aus, welcher Anteil des Volumens nach 4 Stunden noch mit den zwei zu pumpen ist.
Es gilt also Anteil in den ersten 4 Stunden:

$$\frac{1}{15}(4-3) + \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right) \cdot 4 = \frac{164}{360}$$

Nach den vier Stunden ist noch der Anteil von $\frac{196}{360}$ zu pumpen aber nur von ersten beiden Pumpen.
Es gilt also:

$$\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{18}\right) \cdot t_1 = \left(\frac{11}{90}\right) \cdot t_1 = \frac{196}{360}$$

Die Gleichung hat folgende Lösung: $t_1 = \frac{49}{11} \approx 4\text{h und } 27 \text{ min.}$
Das Becken wäre hier also erst nach 8 h und 27 min vollständig gefüllt.